

• Üç değişkenli fonksiyonlarla ilgili yan şartın iki tane olabileceğini başlangıçta belirtmiştik. Daha genel olarak Lagrange çarpım yöntemi,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ nin } g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

yan şartlarına göre ekstrem değerlerini bulmak için de uygulanabilir ($m \leq n-1$). 4.62 Teoreminin hipotezlerine benzer hipotezler altında f nin ekstrem noktaları varsa onlar

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

Lagrange fonksiyonunun $\nabla L(q_0) = 0$ kritik noktaları arasındadır (Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dir).

4.5. PROBLEMLER

4.5.1. Aşağıdaki fonksiyonların (x_0, y_0) kritik noktalarını bulunuz ve onları $\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ yöntemini kullanarak sınıflandırınız.

a) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ b) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$ c) $f(x, y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$

4.5.2. Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını bulunuz, çeşitlerini belirtiniz ve ekstrem değerlerini bulunuz.

a) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$ b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

c) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5,$ d) $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy,$ f) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by,$

g) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15.$ h) $f(x, y) = -xye^{(-x^2-y^2)/2}$

i) $f(x, y) = \sin x \sin y$ j) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 3y^3 + 9y^2 - 3xy + 9y - 9x$

k) $f(x, y) = \cos x e^{\cos y}$ l) $f(x, y) = \sin(xy)$

4.5.3. Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen kompakt bölgeler üzerindeki kritik noktalarını ve bu noktaların çeşitlerini belirtiniz.

a) $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x,$ $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}$

b) $f(x, y) = 1 - x,$ $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $f(x, y) = 2xy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

d) $f(x, y) = x^2ye^{-(x+y)}$, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ ve } x + y \leq 4\}$.

e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 1$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0\}$.

f) $f(x, y) = (-2x)/(x^2 + y^2 + 1)$, $D = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.

g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.5.4. $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$ kapalı dikdörtgeninde $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ veriliyor. f , ekstrem değerlerini alır mı? D bölgesini çiziniz. Bu bölgenin orijine en yakın ve en uzak noktalarını geometrik olarak belirtiniz ve buna göre f nin maksimum ve minimum değerlerini bulunuz. D bölgesi yerine kapalı olmayan $\{(x, y) : 0 < x \leq a, -b \leq y \leq b\}$ bölgesini alarak f nin ekstremlerini araştırınız.

4.5.5. $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ yarım koni yüzeyinin $(10, 12, 0)$ noktasına en yakın olan noktasını bulunuz.

4.5.6. Kenar uzunlukları toplamı $12a$ olan bir dikdörtgen prizmanın hacminin maksimum olması için kenarları ne olmalıdır?

4.5.7. $12 m^2$ lik bir kartondan üstü açık bir kutu yapmak istiyoruz. Kutunun hacminin maksimum olması için kutunun x , y ve z kenarları ne olmalıdır.

4.5.8. Üstü açık prizma şeklinde $12 cm^3$ hacminde bir kutu yapmak istiyoruz. En az karton harcanacak şekilde (yüzey alanı minimum olacak şekilde) kutunun boyutlarını bulunuz.

4.5.9. $P = (1, 0, -2)$ noktasının $x + 2y + z = 4$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

4.5.10. Lagrange çarpım yöntemi ile $x^2y = 16$ eğrisi ile orijin arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

4.5.11. $f(x, y) = y$ nin $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$ yan şartına göre minimumunu araştırınız.

4.5.12. Lgrange çarpım yöntemini kullanarak $f(x, y) = x - 2y + 1$ 'in $g(x, y) = x^2 + 3y^2 = 21$ 'e göre ekstremlerini bulunuz.

4.5.13. Lgrange çarpım yöntemini kullanarak $f(x, y) = 3x^2 + y^3$ 'ün $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ yan şartına göre ekstremlerini araştırınız.

4.5.14. Lgrange yöntemini kullanarak $f(x, y) = xy^2$ nin $S : x^2 + 4y^2 \leq$

12 bölgesi üzerindeki mutlak maksimumunu ve mutlak minimumunu bulunuz.

4.5.15. $f(x, y, z) = x + y + z$ nin $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ ve $g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$ yan şartlarına göre ekstremlerini araştırınız.

4.5.16. $x - y = 2$ ve $x - 2z = 4$ düzlemlerinin arakesiti olan doğrunu orijine en yakın noktasını bulunuz.

4.5.17. $f(x, y, z) = x + y$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küre yüzeyi üzerindeki ekstrem değerlerini bulunuz.

4.5.18. $f(x, y, z) = x$, $g_1(x, y, z) = z - 1 = 0$ düzlemi ile $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ küre yüzeyinin arakesiti olan çember üzerinde ekstremlerini araştırınız.

4.5.19. 4.5. 8. Problemini Lgrange çarpım yöntemini kullanarak yeniden çözüntüz.

4.5.20. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (Hiperbolik silindiri) üzerinde orijine en yakın olan noktayı bulunuz ($f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ veya denk olarak $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ nin $x^2 - y^2 - 1 = 0$ yan şartına göre minimumunu araştırırken $z^2 = x^2 - 1$ ve $x^2 = z^2 + 1$ seçiniz ve ilk halde nerede yanlış yapıldığını açıklayınız).